Prof. Dr. Alfred Toth

Topoi invertierbarer Objekte

1. Obwohl man, wie R. Kaehr wiederholt zu Recht betont hatte, zur Darstellung kontexturierter semiotischer Relationen „Saltatorien“ anstatt von Kategorien benötigt (vgl. Kaehr 2008), wollen wir hier einmal „experimentellerweise“ von kontexturierten Kategorien ausgehen, um damit eine der wohl auffälligsten Besonderheiten der Semiotik zu begründen, den „umkehrbaren“ Objekten. Seien

$\underline{S}$: $3._{2.3} \rightarrow 2._{1.2} \rightarrow 1._{1.3}$

$\underline{S}^{o}$: $.3_{2.3} \leftarrow .2_{1.2} \leftarrow .1._{1.3}$

die kontexturierten semiotischen Kategorien, wobei S^{o} die zu S duale ist.

Während S ausschliesslich kovariante Morphismen hat, hat $\underline{S}^{o}$ ausschliesslich kontravariante. Man kann sich also zunächst zwei „gemischte“ Kategorien vorstellen:

$\underline{S}^{?}$: $.3_{2.3} \leftarrow .2_{1.2} \rightarrow .1_{1.3}$

$\underline{S}^{??}$: $.3_{2.3} \rightarrow .2_{1.2} \leftarrow .1_{1.3}$

2. Werfen wir einen Blick auf die kontexturierte semiotische Matrix

	$.1_{1.3}$	$.2_{1.2}$	$.3_{2.3}$
$1._{1.3}$	$1.1_{1.3}$	1.2_{1}	1.3_{3}
$2._{1.2}$	2.1_{1}	$2.2_{1.2}$	2.3_{2}
$3._{2.3}$	3.1_{3}	3.2_{2}	$3.3_{2.3}$

Hier erscheinen also sowohl Objekte (Subzeichen) als auch Morphismen (Semiosen) in bestimmten Kontexturen. Während man nun Pfeile problemlos invertieren kann, z.B.

$1._{1.3}\ .2_{1.2} \rightarrow 1.2_1 = (1 \rightarrow 2)_1$

$2._{1.2}\ .1_{1.3} \rightarrow 2.1_1 = (1 \leftarrow 2)_1$,

kann man Objekte auf die folgenden 4 Arten komponieren (so dass also die kartesische Multiplikation nur eine von 4 Verknüpfungen ist).

$1. \circ .1 = 1..1 = 1.1$

$1. \circ 1. = 1.1.$

$.1 \circ .1 = .1.1$

$.1 \circ 1. = .11.$,

wobei gilt:

$(.11.) = \mathrm{I}(1..1)$

$(1.1.) = \mathrm{I}(.1.1)$.

Wir wollen hier provisorisch (bis ein besserer Terminus zur Verfügung) der kartesischen Multiplikation (1..1) die „kartesische Division“ (.11.) gegenüberstellen. Diese stellen im Gegensatz zu (1.1.) und (.1.1) vollständige Inversionen vs. partielle Inversionen dar.

3. Wenn wir nun bei nden Objekten von der kategoriellen zur Topos-Darstellung übergehen, bekommen wir

$1_{1.3}\!\rightarrow \circ \leftarrow_{1.3}1 = 1_{1.3}\!\rightarrow\leftarrow_{1.3}1 = 1\downarrow_{1.3}1$

$1_{1.3}\!\rightarrow \circ\ 1_{1.3}\!\rightarrow\ = 1_{1.3}\!\rightarrow 1_{1.3}\!\rightarrow$

$\leftarrow_{1.3}1 \circ \leftarrow_{1.3}1 = \leftarrow_{1.3}1\leftarrow_{1.3}1$

$\leftarrow_{1.3}1 \circ 1_{1.3}\!\rightarrow\ = \leftarrow_{1.3}11_{1.3}\!\rightarrow$,

mit $(\leftarrow_{1.3}11_{1.3}\!\rightarrow) = \mathrm{I}(1_{1.3}\!\rightarrow\leftarrow_{1.3}1)$

$(1_{1.3}\!\rightarrow 1_{1.3}\!\rightarrow) = \mathrm{I}(\leftarrow_{1.3}1\leftarrow_{1.3}1)$.

In einem letzten Schritt beseitigen wir also die letzten „substantiellen" Bestandteile:

$1{\downarrow}_{1.3}1 = {\downarrow}_{1.3}$

$1_{1.3}{\rightarrow}1_{1.3}{\rightarrow} = {\rightarrow}{\rightarrow}_{1.3}$

${\leftarrow}_{1.3}1{\leftarrow}_{1.3}1 = {\leftarrow}{\leftarrow}_{1.3}$

${\leftarrow}_{1.3}11_{1.3}{\rightarrow} = {\leftarrow}{\rightarrow}_{1.3}$

Damit haben wir also die abstraktest mögliche Darstellung aller 4 grundlegenden Objekttypen erreicht. Wir haben jetzt also die Grundlagen einer Semiotik, die ohne Residuen ausschliesslich durch Pfeile darstellbar ist.

Bibliographie

Kaehr, Rudolf, Diamond Semiotic Short Studies. Glasgow 2009

6.12.2010